

⑥ Интегрируемые функции и их свойства

Ф-ция $f(x)$ наз-ся **интегр. по Лебегу**, if $\exists$ путь прост. интегр. ф-ций $f_n: f_n(x) \Rightarrow f(x)$
л-ма Лебега наз-ся $\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu$

Св-ва интегр. ф-ций

1) $f(x)$ интегр. $\Rightarrow cf(x)$ интегр., и $\int_X cf(x) d\mu = c \int_X f(x) d\mu$

2) $f(x)$ и $g(x)$ интегр. $\Rightarrow f+g$ интегр., и $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

3) If $f(x) \leq g(x) \forall x \in X$; f, g -интегр. $\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$
 ▲ Ф-н $f(x) \geq 0$. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } k/n \leq f_n(x) \leq \frac{k+1}{n} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$, $k=0, 1, \dots$
 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, f -инт. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists g_n \Rightarrow f(x)$, $|f - f_n| < \varepsilon$, $|g_n - f| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x)| = |f_n(x) - (-f + f - g_n + g_n)| \leq |f_n - f| + |f - g_n| + |g_n| \Rightarrow |f_n(x)| \leq |g_n| + 2\varepsilon$
 $\Rightarrow f_n$ инт., прост.
 $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

4) If $f(x) \geq 0$ и интегр.; $|g(x)| \leq f(x), \forall x$; $g(x)$ изм. Тогда $g(x)$ интегр.

▲ f_n -прост, инт, $f_n \Rightarrow f$; $\exists \lim: g_n \Rightarrow g$
 Построим $g_n = \begin{cases} k/n, & \text{if } k/n \leq g(x) < \frac{k+1}{n} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, $k=0, 1, \dots$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: |f - f_n| < \varepsilon, \forall x \in X$; $|g_n - g| < \varepsilon, \forall x \in X$; $\forall n \geq N$
 $|g_n| = |g_n - g + g| \leq |g_n - g| + |g| \leq \varepsilon + |f(x)| = \varepsilon + |f - f_n + f_n| \leq \varepsilon + |f - f_n| + |f_n| \leq 2\varepsilon + |f_n(x)| \Rightarrow |g_n| \leq 2\varepsilon + |f_n|$
 f_n -прост. интегр., $\Rightarrow g_n(x)$ интегр.
 g_n -прост. $\Rightarrow g_n \Rightarrow g \Rightarrow g$ инт. ■

5) If f инт., то $|f(x)|$ инт. и $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$

! зам If f измер, $|f|$ -инт. $\Rightarrow f$ интегр

Лемма If f инт., g -огр. и изм., то fg тоже инт.
 ▲ $|g(x)| \leq M$; fg -измер; $|fg| \leq M|f|$ инт. $\Rightarrow fg$ инт. ■

$\square$ f инт. на X . Тогда $\int_X f(x) d\mu = \int_X f(x) \chi_A(x) d\mu$

6) (Аддит-ть) If f инт. на X , A, B - изм, $A \cap B = \emptyset$,
то $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

$\blacktriangle \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) \Rightarrow \int_{A \cup B} = \int_A + \int_B$

$\square$ $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $f(x)$ инт. на $X \Rightarrow \int_A f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f d\mu$

7) If $\mu(A) = 0$, то $\int_A f(x) d\mu = 0$, $\forall$ изм. f , инт.

$\blacktriangle$ 1) f - простая: очевидно

2) $\forall f$ - изм., инт.: $f_n \rightarrow f$; $\chi_A(x) f_n \rightarrow \chi_A(x) f \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_X \chi_A(x) f(x) d\mu = 0 \Rightarrow \int_A f(x) d\mu = 0$

8) If $f \stackrel{n.b.}{=} 0$, то $\int_X f(x) d\mu = 0$

$\blacktriangle E = \{x: f(x) \neq 0\}$, $\mu E = 0$. $\square X = X \setminus E \cup E$ - ясно, то
 $\int_{X \setminus E} f(x) d\mu = 0$, $\int_E f(x) d\mu = 0$ вообще $\forall f$ (сб-во 7) $\blacksquare$

9) $\square f$ инт., $\int_X |f(x)| d\mu = 0$. Тогда $f \stackrel{n.b.}{=} 0$

$\blacktriangle$ 1) Φ -м. Мер-во. Лебегува: If $f \geq 0$, то $\forall a > 0$ $\mu\{f \geq a\} \leq \frac{1}{a} \int_X f(x) d\mu$. $\square \int_X f d\mu = \int_{\{f \geq a\}} f d\mu + \int_{\{f < a\}} f d\mu \geq \int_{\{f \geq a\}} f d\mu \geq$

$\geq \mu\{f \geq a\} \geq a \mu\{f \geq a\} \Rightarrow \mu\{f \geq a\} \leq \frac{1}{a} \int_X f(x) d\mu$

2) $\forall n$ $\mu\{f \geq 1/n\} \leq n \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow \mu\{f \geq 1/n\} = 0, \forall n$,
 $\{f > 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq 1/n\} \Rightarrow \mu\{f > 0\} = 0$, и до счетное со-
единение мер 0 имеет меру 0 $\Rightarrow \mu\{f > 0\} = 0 \Rightarrow$
 $f \stackrel{n.b.}{=} 0$